Ostacoli epistemologici e prospettiva socio-culturale

D'Amore B., Radford L., Bagni GT. (2006). Ostacoli epistemologici e prospettive socioculturali. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 29B, 1, 11-40.

Bruno D'Amore
Dipartimento di Matematica
Università di Bologna

Luis Radford
École des sciences de l'éducation
Université Laurentienne
Sudbury, Ontario (Canada)

Giorgio T. Bagni
Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Udine

Summary. In this paper, we present a conversation about some themes that have been the object of debate and controversy in mathematics education in the past few years, such as current understandings of epistemology, historical conceptual developments, the role of culture in cognition, and the classroom as a form of society. Among other things, our conversation deals with the question of whether or not the idea of epistemological obstacles can be considered as a basis for a meaningful link between history and mathematics education.

Sommario. Nel presente lavoro proponiamo una conversazione su alcuni temi che sono stati oggetto di dibattiti e di controversie in didattica della matematica negli ultimi anni, come le attuali concezioni epistemologiche, le interpretazioni degli sviluppi storici dei concetti, il ruolo della cultura nella cognizione e la classe in quanto forma di società. Tra le altre cose, la nostra conversazione riprende la questione se l'idea di ostacolo epistemologico possa o

non possa essere considerata come base per un significativo collegamento tra la storia e la didattica della matematica.

Ostacoli epistemologici e prospettiva socio-culturale

Bruno D'Amore
Dipartimento di Matematica
Università di Bologna

Luis Radford
École des sciences de l'éducation
Université Laurentienne
Sudbury, Ontario (Canada)

Giorgio T. Bagni
Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Udine

1. Introduzione

La considerazione di un concetto matematico attraverso la sua evoluzione storica ed epistemologica richiede l'assunzione di posizioni impegnative e significative. Problemi non trascurabili sono inoltre connessi all'interpretazione, inevitabilmente condotta alla luce dei nostri attuali paradigmi culturali mediante i quali si pongono in contatto culture «diverse ma non incommensurabili» (Radford, Boero, Vasco, 2000, 165; nel presente lavoro le traduzioni sono nostre).
L'attualità didattica dell'argomento introdotto è evidente: i processi di insegnamento–apprendimento della matematica sono influenzati dalle concezioni dei docenti sulla natura della conoscenza scientifica e della sua evoluzione (Brickhouse, 1990; Hashweb, 1996) e dai cambi di convinzione avvenuti a seguito di maturazione causata da riflessioni personali o, meglio, da occasioni di forte confronto teorico (D'Amore, Fandiño Pinilla, 2004; Bagni, 2005 e in via di pubblicazione). Un'evoluzione storica proposta didatticamente da un punto di vista moderno permetterebbe forse di presentare agli allievi gli "ostacoli epistemologici" principali e di chiarire alcune posizioni storiche la cui debolezza si è rivelata successivamente; ma, d'altra parte, un'impostazione che pretenda di far seguire allo sviluppo cognitivo un percorso modellato sull'evoluzione storica (pensiamo al parallelismo tra ontogenesi e filogenesi, espresso da E. Hackel nel lontano 1874, e alla

nota tesi in: Piaget, Garcia, 1983; si veda: Furinghetti, Radford, 2002) incontrerebbe notevoli difficoltà teoriche (Werner, 1948; Radford, 1997).
La presentazione di elementi storici con riferimento al proprio contesto culturale offre la possibilità di un organico approfondimento e induce riflessioni fondamentali sulla genesi di un concetto (Bagni, D'Amore, 2005): la scelta di una storia "interna", di uno sviluppo isolato della matematica, appare problematica (Grugnetti, Rogers, 2000, 40) e difficilmente sostenibile dal punto di vista epistemologico.
Contrastano la formazione dei concetti, agendo come ostacoli, vari agenti classificati negli anni '70-'80 da G. Brousseau (1976, 1983, 1989). Analizzeremo in questo lavoro l'impostazione teorica di L. Radford a proposito dell'interpretazione da dare all'idea di "ostacolo epistemologico" (Bachelard, 1938), sulla quale può essere basato un collegamento della storia alla didattica, attraverso l'epistemologia. Realizzeremo tale approfondimento proponendo il resoconto di una conversazione a tre, con Luis Radford e Bruno D'Amore che risponderanno ad alcune domande poste da Giorgio Bagni.

2. Storia della matematica e didattica

Bagni: Ludwig Wittgenstein (1956, IV, 52) ha scritto: «Anche cinquecento anni fa poteva esistere una filosofia della matematica; una filosofia di quello che la matematica era allora». Ciò significa che la riflessione sulla matematica e sulla didattica deve essere storicizzata?

Radford: Qui Wittgenstein distingue il lavoro del matematico da quello del filosofo. Il filosofo, dice, non fa matematica: *giudica* la matematica. Come tutti i giudizi, quello del filosofo si colloca in un periodo storico; quindi, il filosofo giudica la matematica del proprio tempo. In questo senso, una filosofia della matematica era possibile 500 anni fa ed è ancora possibile oggi. Il punto notevole dell'idea di Wittgenstein è il sottolineare la distanza tra il filosofo e il matematico. È questa distanza che rende un gioco linguistico (la matematica) diverso dall'altro (la filosofia della matematica). Entrambi i giochi linguistici sono storici, Wittgenstein ce lo dice. E tali sono anche le relazioni tra di essi. Sebbene io non sia appassionato dall'idea dei giochi linguistici, per ragioni che emergeranno nel corso della nostra conversazione, considererò, per rispondere alla domanda, la didattica della matematica come un gioco linguistico. Come la filosofia, essa getta una nuova luce sulla natura della matematica. Si tratta di una luce differente da quella diffusa su di essa dal filosofo, dato che il ruolo del didattico non è quello di *giudicare* la matematica. Alcuni di noi sono più interessati al problema dello sviluppo concettuale del pensiero matematico (si veda ad esempio il Capitolo 5 dell'ICMI Study sulla storia e la didattica della matematica: Fauvel, van Maanen, 2000). Questo problema ci porta a considerare altri problemi, come la relazione tra filogenesi ed ontogenesi. Possiamo allora creare un gioco linguistico – che sia, come tutti i giochi linguistici, culturalmente e storicamente situato – che senza portare ad un giudizio possa fornire degli elementi di comprensione della natura della matematica. Ciò nonostante, il problema è molto più complicato di quanto possa apparire a prima vista. Da un lato, esso coinvolge le concezioni della matematica. Molti epistemologi non accettano l'epistemologia genetica di Piaget, in quanto, affermano, la natura e lo sviluppo della matematica non possono essere chiariti dall'esame del pensiero infantile. Ci scontriamo qui con la classica opposizione tra psicologia ed epistemologia che è stata parte del dibattito sui fondamenti della matematica all'alba del XX secolo, un dibattito nel quale Wittgenstein senza esitazione prese parte contro la psicologia del suo tempo.

D'Amore: Quando una qualsiasi riflessione umana acquista la denominazione di "disciplina", ciò significa che si sta storicizzando, cioè che sta assumendo una dimensione di sviluppo che ha come asse portante quello temporale. Prima, ci sono tante teorie quanti praticanti; poi, si formano un vocabolario e delle pratiche comuni (Romberg, 1988). Quando esiste una pratica sufficientemente condivisa, nascono una metapratica ed una riflessione su quel che la disciplina permette di costruire. Questa riflessione all'inizio è fatta dagli stessi esseri umani che sviluppano le pratiche, poi può spettare ad altri. Una riflessione sulla disciplina non è eludibile ed accompagna ogni disciplina, anche la matematica. In genere, le didattiche seguono di parecchio le discipline, ma il caso della matematica è speciale, a mio avviso. Sembra ìnsito nella stessa creazione matematica la necessità di comunicarla, e questo è il primo passo verso la sua didattica. Ciò non significa che matematica e didattica *debbano* essere storicizzate, ma che di fatto lo sono. Su entrambe, però, si possono esprimere giudizi e valutazioni, e questo ci riporta alla frase di Wittegenstein. Ci saranno giudizi e valutazioni sulla matematica e ce ne saranno sulla didattica della matematica; essi riguardano temi diversi, pratiche umane diverse, lingue diverse, scopi diversi; e tuttavia avranno in comune un substrato che alimenta entrambe. La "storicizzazione" avviene dunque separatamente, secondo l'accezione di Feyerabend (2003, 120): l'intera conoscenza umana «è un *processo storico* complesso ed eterogeneo che contiene anticipazioni ancora vaghe e incoerenti di future ideologie accanto a sistemi teorici molto sofisticati e a forme di pensiero antiche e fossilizzate. Alcuni suoi elementi sono disponibili nella forma di asserzioni scritte chiare e precise, mentre altri sono nascosti e diventano noti solo per contrasto, per confronto con opinioni nuove e insolite» (Feyerabend, 2003, 120, corsivi nel testo). Per la matematica, il passaggio descritto da Feyerabend è avvenuto secoli fa, per la didattica, a mio avviso, è in corso.

Bagni: Appare importante, addirittura fondamentale che un insegnante di matematica, in ogni livello scolastico, si confronti con la storia e l'epistemologia della propria disciplina e che giunga così ad impiegare i riferimenti storici consapevolmente e coerentemente con le proprie concezioni epistemologiche. Ma com'è possibile, per un insegnante, accostarsi alla storia? Mediante fonti secondarie? E quale ruolo suggerisci di riservare alla lettura dei testi originali? In particolare, come si può tenere correttamente conto (Barbin, 1994) delle concezioni degli studiosi che, nei vari periodi storici, hanno curato le edizioni delle opere matematiche considerate?

Radford: Una delle principali caratteristiche dell'approccio storico-culturale al pensiero matematico che ho descritto negli scorsi anni è la componente storica. Ciò significa, tra le altre cose, che ciò che conosciamo e il modo con cui raggiungiamo la conoscenza sono da inquadrare non solo mediante *ciò* che facciamo ora e *come* lo facciamo, ma anche da un'intelligenza storica riposta in pratiche sociali, istituzioni, linguaggio, artefatti, libri, monumenti e così via. La conoscenza e il conoscere sono entrambi sostenuti da questa intelligenza storica che abbiamo ereditato dalle generazioni passate. Questo è il motivo per cui gli insegnanti, a parer mio, dovrebbero conoscere almeno qualcosa della storia della matematica. Ma questa mia affermazione non riflette solo una posizione "umanistica" per contrastare l'agonia di un mondo post-industriale che porta alla spersonalizzazione. Essa sostiene lo stimolo politico di renderci consapevoli del fatto che non siamo né il prodotto esclusivo della nostra attività né il prodotto irrevocabile delle nostre pratiche discorsive. La storia della matematica (concepita o meno come una semplice eroica sequenza di eventi, con nomi e date) è un mezzo per comprendere noi stessi come esseri storici e comprendere la nostra responsabilità di educatori. Fino a che punto e come gli insegnanti devono acquisire familiarità con la storia della matematica è indubbiamente una buona domanda alla quale non c'è una sola risposta.

D'Amore: Esistono fonti "secondarie" di ottimo livello, tali da indurre il gusto delle letture dirette (alcune le abbiamo raccolte in: D'Amore, Speranza, 1989, 1992, 1995). A me è successo, decenni fa. Non credo che un insegnante debba necessariamente trasformarsi in uno storico della matematica. A me pare fondamentale che l'insegnante avverta la forte presenza della trasformazione storica delle teorie che insegna, che non le senta come immanenti, immutabili, definitive. Deve inoltre farsi ragione del fatto che le teorie si sviluppano e si evolvono soprattutto a causa delle pratiche umane condivise, che ogni teoria è il risultato di apporti sociali, anche se è diffusa la tendenza a far apparire spesso l'individuo come creatore isolato, scevro da condizionamenti (Radford, 1997, 2003b; Godino, Batanero, 1994). A mio parere è essenziale che l'insegnante conosca a fondo, anche se attraverso studi di fonti a carattere indiretto, purché autorevoli, storia ed epistemologia di quel che insegna, non foss'altro che per due ragioni professionali: a) accrescimento culturale, b) presa di contatto con le ragioni obiettive dell'esistenza di ostacoli epistemologici (D'Amore, 2004). Tra i grandi benefici didattici concreti che io avverto: una diversa valutazione dell'azione dell'allievo (errori, misconcezioni, per esempio), una diversa valutazione dell'idea di rigore, un diverso atteggiamento nei confronti della comunicazione matematica, … Mi pare poi fondamentale un approccio sociale - sociologico a questi aspetti epistemologico concettuali, che restituiscano alla nostra disciplina quel suo essere emergente da attività umane, quel suo essere condivisa, discussa, comunicata, tramandata, *usata* in contesti culturali diversi, in situazioni diacroniche e sincroniche.

Bagni: Secondo l'approccio socio-culturale, la conoscenza è collegata alle attività nelle quali i soggetti si impegnano (Radford, 1997, 2003a, 2003b) e ciò deve essere considerato in relazione con le istituzioni culturali del contesto di volta in volta considerato. Da questo punto di vista come considerate, oggi, gli ostacoli epistemologici?

D'Amore: Sostanzialmente, non credo che la base storica dell'idea di ostacolo epistemologico lanciata negli anni '70 da Brousseau venga minata alle fondamenta da queste considerazioni di Radford che, d'altra parte, condivido in pieno. Proprio per discutere di questo punto, li ho invitati entrambi in Svizzera nel 2004 ed il risultato del colloquio a tre mi ha profondamente convinto. Certo, la concezione di ostacolo epistemologico sembra sempre più un costrutto teorico, al quale fare riferimento, che non un mezzo di analisi per interventi didattici; esso non appare più isolato da altre forme di spiegazione oggettiva dei risultati dei processi di insegnamento-apprendimento, come lo era negli anni '80 (D'Amore, 2003b). L'ostacolo epistemologico risulta fortemente legato a fattori sociali e non più solo concettuali, nei quali la storia "pura" della matematica entra in contatto con le storie delle pratiche umane (D'Amore, 2005a). Quel che continua a piacermi molto della presentazione classica di Brousseau di ostacolo epistemologico è il suo essere espressione di conoscenza e non di mancanza di conoscenza. Questo punto, non solo mi ha sempre affascinato e convinto, ma mi è stato molto utile nelle ricerche di microdidattica in aula. Non solo, mi è servito anche come base di appoggio per riflessioni azzardate, come quella di revisione semantica del termine "misconcezione" (D'Amore, Sbaragli, 2005). Certo, legare l'idea di ostacolo epistemologico a fattori emergenti dalle pratiche sociali, costringe ad una revisione, oggi, di quella che fu ieri la fondazione di tutta la *teoria degli ostacoli*; ma, d'altra parte, *ogni* teoria, prima o poi, viene revisionata.

Radford: L'idea di ostacolo epistemologico è stata importata nella didattica della matematica nei tardi anni Settanta, oltre vent'anni fa (si veda Perrin-Glorian, 1993, 112). Era un periodo in cui poca attenzione si dedicava al ruolo della collocazione culturale nell'attività cognitiva. Quando gli aspetti sociali o culturali sono stati presi in considerazione, sono stati considerati alla stregua di qualcosa di non molto importante. Lakatos, ad esempio, ha diviso lo sviluppo della matematica in due storie, una esterna e una interna. Quella esterna include la collocazione culturale e, secondo lui, ha soltanto un ruolo periferico: buone condizioni culturali possono accelerare lo sviluppo delle idee ma non possono in alcun caso influire sulle idee stesse. Da questo punto di vista, tali buone o cattive condizioni sono parte di ciò che è estraneo alla matematica. Al contrario, l'evoluzione delle idee matematiche propriamente dette riguarda la storia interna, la sola “vera”. Questo approccio, naturalmente, è terribilmente razionalista. Ora, secondo la teoria degli ostacoli epistemologici, ciò che rende un ostacolo epistemologico è la sua presunta natura non-culturale, non-didattica, non-ontogenetica. Un ostacolo è epistemologico per la sua presunta intrinseca natura epistemica. In questa chiave di lettura, la natura epistemica della cultura è esclusa dall'inizio. In accordo con tale idea, il “milieu” (come viene considerato nella *Teoria delle Situazioni* di Brousseau) è spesso concepito come qualcosa che si oppone all'individuo. Più precisamente, la relazione tra l'individuo e il suo milieu è antagonistica. Ciascuno è coinvolto in un gioco razionale, cercando di ottenere il massimo dall'altro – in un gioco a somma nulla. Ho analizzato questo punto in un articolo pubblicato circa 8 anni fa (Radford, 1997). Sentendo D'Amore dire che “l'ostacolo epistemologico risulta fortemente legato a fattori sociali”, mi chiedo quanto forte possa davvero essere questo legame in tale teoria. Penso che non possa essere così forte, altrimenti la base dell'idea di ostacolo epistemologico ne risulterebbe distrutta e la notissima tipologia di ostacoli (ontogenetico, didattico, culturale ed epistemologico) non avrebbe più molto senso. Preferisco analizzare teoricamente il problema del pensiero matematico secondo una linea diversa. Credo che il pensiero e la conoscenza siano *embricati* definitivamente nei loro contesti culturali. Ricordo la discussione sull'importanza di prestare attenzione ai contesti culturali in Francia nel 1998, durante i lavori dell'ICMI Study sulla Storia. Mi è stato detto che quanto proponevo non era collegato all'epistemologia, bensì alla sociologia della conoscenza! Se guardiamo alla recente letteratura in didattica della matematica, le cose sembrano essere un po' cambiate da allora, sebbene, naturalmente, in alcuni paesi più che in altri.

Bagni: La connessione tra ambiente culturale e matematica in esso elaborata non si limita ad una pur stimolante coincidenza (Wartofsky, 1979);a tale riguardo si può citare Radford: «La configurazione e il contenuto della conoscenza matematica è propriamente ed intimamente definito dalla cultura nella quale essa si sviluppa» (Radford, 1997, 32). Approfondiamo questo punto essenziale.

Radford: In effetti, ciò che suggerisco è che la cultura è molto più che uno stimolo e molto più che un ostacolo per la conoscenza. Ciò che affermo è che la conoscenza è strettamente radicata alla sua collocazione culturale o, in altre parole, che la cultura è con-sostanziale alla conoscenza. Ma qui dobbiamo essere cauti. Mentre qualche anno fa la cultura era considerate priva di un ruolo *fondamentale* nella conoscenza e nell'attività cognitiva, ora sembra che la cultura abbia un ruolo sempre e dovunque. Oggi, anche i Platonisti dicono che la matematica comporta un aspetto umano e culturale, dato che porta un essere umano in un contesto culturale a scoprire le verità eterne delle quali si suppone che la matematica sia costituita. Dunque, se non siamo più precisi a proposito del collegamento tra cultura e mente, tra cultura e sapere, finiremmo per chiuderci in una posizione piuttosto ingenua. Sulla base di epistemologi come Wartofsky e Ilyenkov, ho suggerito che la conoscenza è un prodotto di un tipo specifico di attività umana − precisamente il *pensare*. E pensare è un genere di prassi sociale, una forma di riflessione sul mondo secondo categorie concettuali etiche, estetiche, ed altre categorie culturali (Radford, in via di pubblicazione 1). Il pensiero greco del periodo classico era conformato dalla distinzione eleatica tra essere e non-essere. Tale distinzione ha operato come una categoria concettuale generale che ha sostenuto l'epistéme greca e le sue varie manifestazioni, tra le quali il pensiero matematico. L'epistéme cinese era conformata da categorie concettuali diverse, in particolare dall'opposizione yin/yang. Questa distinzione ha reso concepibile, in campo matematico, qualcosa di simile a quanto noi oggi chiamiamo "numeri negativi", numeri che erano inconcepibili nel periodo greco classico. Il pensiero occidentale ha dovuto sottostare a profonde trasformazioni per crescere con il seme del nostro concetto contemporaneo di numeri negativi. In effetti, i numeri negativi divennero concepibili nel contesto del Capitalismo emergente del XV e XVI secolo, con la nuova divisione del lavoro in attività umane e un insieme di concomitanti nuove categorie concettuali culturali, in particolare il "valore" come astrazione culturale ed efficienza in senso tecnologico (Radford, 2004a). Dunque ci troviamo completamente d'accordo su questo punto – la connessione tra cultura e matematica non può essere considerata come una pura coincidenza. C'è una connessione profonda tra di esse, e la ragione è che le matematiche (al plurale) sono forme culturali di riflessione sul mondo, forme culturali di dar senso ad esso.

D'Amore: La matematica è il prodotto dell'azione reciproca, relazionale, di individui all'interno di una società cui essi appartengono; tali individui, volenti o nolenti, mettono in atto strategie di appartenenza a quella società (a volte sono "pratiche", a volte "metapratiche") (Godino, Batanero, 1994; D'Amore, 2005a). Il loro comportamento è ben spiegato dalle analisi a carattere sociologico. All'interno di tale società, il linguaggio condiviso acquista un ruolo determinante. Esso non è solo veicolo di comunicazione ma, a causa delle interazioni sociali cui può contribuire, il linguaggio si fa modalità di creazione. Nella matematica, la creazione e la comunicazione dei suoi contenuti sono spesso considerati tutt'uno (McClain, Cobb, 1997). La cultura non è altro che l'adesione ad uno schema prestabilito che identifica la società di appartenenza anche quando sembra contraddirla (Bauersfeld, 1995); ne è l'organo propulsore, motivante. Dunque, è impensabile una conoscenza matematica il cui contenuto non sia addirittura l'espressione della cultura della società in seno alla quale si sviluppa. Tutta la storia della matematica mostra come lo sviluppo di pratiche determini l'accettazione di idee: la costante nascita di algoritmi nuovi, la creazione di un'algebra simbolica, l'idea stessa di geometria analitica, l'uso dei numeri interi (relativi)... Non riesco a decidermi a dire di più, che cioè le idee siano addirittura il risultato di pratiche o di necessità, perché ho molti esempi contrari. Credo che il pensiero umano si evolva verso conquiste culturali che si affermano come idee, che attorno ad esse si elabori uno statuto concettuale sempre più condiviso e che un atto importante di tale condivisione sia la necessità di *usarle* per uno scopo umano non solo in potenza, ma in atto. Ritengo che un discorso del tutto analogo si possa fare per quanto concerne la didattica della matematica. Solo per fare un esempio, chi oggi, conoscendoli, rinuncerebbe agli strumenti concettuali che la ricerca in didattica della matematica ha creato, per tornare ad ipotesi didattiche come quelle illusorie degli anni '70, basate su strumenti artificiali pre-confezionati?

Bagni: Per quanto riguarda l'importanza del linguaggio, nelle moderne riflessioni in didattica, è necessaria una delicata ed accorta riflessione a proposito del suo ruolo nella formazione stessa dei concetti: «Negli ultimi anni [...] riscontriamo una chiara tendenza a considerare il linguaggio e il discorso alla stregua di produttori di conoscenza e di idee. Nonostante ciò, siamo autorizzati a porci la seguente domanda: possiamo davvero attribuire al linguaggio questo potere di creare gli oggetti teorici del mondo degli individui?» (Radford, 2003a, 124). Che risposta dare a tale domanda?

D'Amore: Credo si debbano distinguere due tipologie di oggetti nell'ambito della creazione della competenza matematica (apprendimento matematico): l'oggetto matematico stesso e l'oggetto linguistico che lo esprime. Ritengo che l'apprendimento matematico di un oggetto O da parte di un individuo I all'interno della società S non sia altro che l'adesione di I alle pratiche che gli altri membri di S sviluppano attorno al dato oggetto O. Come si esprime tale adesione? Con l'accettazione di pratiche che sono, per lo più, linguistiche. Dunque, anche se reputo che ci sia differenza tra oggetti della matematica e oggetti linguistici che li esprimono, tuttavia bisogna ammettere che tale adesione avviene sulle modalità di scambio linguistico dato che sono esse, soprattutto, quelle che determinano le "pratiche" di cui tanto si parla. Dunque, anche se non è il linguaggio a creare gli oggetti, gli oggetti vengono creati *insieme* al linguaggio all'interno del quale vengono espressi. A loro volta, gli oggetti "espressioni linguistiche" sono oggetti. Accetto infatti l'idea di Blumer (1982, 8) secondo la quale un oggetto è «tutto quel che può essere indicato, tutto quel che può essere segnalato o al quale può essere fatto riferimento». Quanto sia utile tale scelta, è stato ampiamente mostrato da Godino nella sua ontosemiotica della conoscenza matematica (Godino, 2002; su questo tema, si veda anche D'Amore, Godino, 2006). Tuttavia, io sono personalmente in imbarazzo su questo tema e non ho riserve nell'ammetterlo (D'Amore, 2001a, b, 2003c, d). Credo nel paradosso di Duval e credo che l'unica via di accesso alla noetica sia la semiotica, almeno in matematica. Eppure, riconosco al linguaggio, ai linguaggi, una forza che appartiene alle riflessioni del passato, degli anni '80. Il linguaggio è mediatore tra pratiche e pensiero, ma anche tra chi opera tali pratiche e chi chiede di comunicare ad altri il proprio pensiero. Sono gli esseri umani che adottano ed esplicano pratiche, ma è il linguaggio condiviso, sono i linguaggi condivisi, che operano e realizzano il ponte comunicativo. Nella matematica, a volte, è difficile distinguere i due aspetti. Spesso noi pensiamo al linguaggio per come lo esprimiamo nella sua forma più visibile, orale, scritto, formale, pittografico, figure, schemi, disegni… Ma in un certo senso appartengono alle forme del linguaggio le espressioni attraverso le quali le pratiche umane si realizzano, la musica, le opere d'arte, i manufatti, i gesti, il gioco, le costruzioni (in senso lato) di qualsiasi genere. La matematica abbonda di presenze di questi generi espressivi. Se pensiamo al linguaggio solo come artefatto comunicativo, la sua molteplicità ancora stupisce. Le limitazioni intrinseche alla sua realizzazione possono costituire ostacoli alla esplicitazione totale del pensiero. Cosicché, lacune dell'uno si identificano con deficienze dell'altro. Nella matematica e nella sua storia questo punto è evidente, nella didattica della matematica è continuamente sotto gli occhi di qualsiasi osservatore. Amo molto pensare al linguaggio come ad un prodotto di conoscenza dell'essere umano pensante, come ad uno dei prodotti possibili. In attesa di sistemare le idee, per ora questo approccio mi permette di distinguere il linguaggio da chi lo usa, la conoscenza delle sue forme esplicite di ostensione da parte degli individui.

Radford: Mi considero tra coloro i quali apprezzano l'importanza epistemica del linguaggio. Ma non ritengo che – epistemologicamente parlando – i modi di concettualizzare, conoscere e pensare possano essere adeguatamente descritti in termini di pratiche discorsive. Cerco di spiegarmi e di rispondere alla domanda riportando quanto successo ad un antropologa che si recò in Messico, alcuni anni fa, a studiare una specifica comunità – i Mazahua. L'antropologa desiderava sapere come i genitori istruivano i propri figli. Scelse alcuni genitori e domandò loro: "Come istruite i vostri bambini?". Tutti gli interpellati furono sorpresi dalla domanda. Nel corso degli interventi, essi affermarono che non istruivano i propri figli, ma che i bambini si limitavano ad imparare. Precise osservazioni etnografiche, più tardi, chiarirono che, per imparare, i bambini si impegnavano in sofisticate pratiche sociali con i loro genitori, pratiche nelle quali era essenziale osservare i genitori al lavoro, quindi unirsi ad essi in tale lavoro, iniziare poi ad agire sotto la supervisione dei genitori, valutare tali azioni, correggerle se necessario etc. Ecco un esempio (de Haan, 1999, 96) di una madre (M) che risponde alle domande dell'intervistatrice (I) a proposito di come M insegna a seminare al proprio figlio di 10 anni:

I: (...) ad esempio, seminare, (lui) lo sa?
M: Seminare, sì.
I: E come l'ha imparato?
M: (*sottovoce*) Con un uomo.
I: E come? (*Sia la madre che una sua figlia, presente al colloquio, ridono, ovviamente trovano strana la mia domanda*)
M: Gli ha detto qualcosa come di andare a seminare.
I: Solo così…
M: Sì.

I: Ma lui ha iniziato subito a seminare?
M: Sì...(*ride*)
I: […] Dici, bene, andiamo a seminare.
M: Sì.
I: Non l'ha mai fatto, prima, diciamo?
M: No.
I: E *come*... perché la prima volta è difficile da fare, e *come*...?
M: Sì, beh, come seminiamo anche noi, solo al momento della semina, la mietitura, seminiamo...

Come l'analisi antropologica suggerisce, nei processi Mazahua di insegnamento-apprendimento, dove troveremmo difficilmente una "trasposizione didattica" nel senso di Chevallard, l'apprendimento del bambino è amalgamato con il suo coinvolgimento nelle pratiche sociali della comunità (figura 1). I Mazahua usano il linguaggio, naturalmente, ma piuttosto che essere confinato in un genere di discorso teorico, il linguaggio è utilizzato come parte della pratica sociale, per affiancare e regolare le azioni, ad esempio, in forma di indice per parlare di linee rette e di spazio, come suggerito dal prossimo esempio riguardante l'aratura (*op. cit.* 104):

Figura 1. Semina di semi di granturco in una comunità Mazahua (da: de Haan, 1999).

M: […] Quando si mostra ehh, come arare, dicevo.
I: Hmm.
M: E dunque deve farlo, è un lavoro che deve fare come lo farebbe un adulto.
I: Hmm.
M: Perché è qualcosa, beh, quando è così (*indicando qualcosa che non è una linea retta*).
I: Sì.
M: Eh no.
I: No.

M: Insomma, devono essere dritte. Insomma, è questo che deve imparare, come gli farà vedere (*probabilmente riferendosi al padre*).

Come commenta de Haan, "al bambino non è permesso di fare le cose diversamente in quanto certi standard [culturali, scientifici] devono essere raggiunti; il bambino deve fare le cose come gli sono state mostrate". Ho voluto ricordare questo esempio perché mostra, ritengo, una pratica sociale che può ben poco essere condotta ad essere discorsiva. Si tratta di una pratica di azioni, dove il linguaggio è presente, ma in modo diverso. Temo che la nostra contemporanea fissazione a proposito del linguaggio – dietro la quale lo spettro di Aristotele sembra ancora ossessionarci – sia alla fine un'altra forma di razionalismo, o forse uno degli ultimi suoi residui. È un'ossessione nella quale le pratiche umane sono sostituite da parole e l'agire umano si perde in una giungla di parole e di segni. Preferisco dire che il linguaggio è mediatore delle attività umane. In qualità di mediatore, sostiene, per un importante aspetto, la nostra storia culturale, come fanno gli artefatti, i monumenti, i dipinti e così via. Ma il linguaggio non ha un potere creativo, semplicemente in quanto il linguaggio non pensa. Chi pensa sono gli individui che usano il linguaggio. Pensando, ovvero riflettendo sul proprio mondo, gli individui usano il linguaggio, gli artefatti etc. e facendo ciò producono i propri oggetti di conoscenza.

3. Classe come società

Bagni: Secondo la prospettiva socio-culturale, l'approccio al fatto storico non è centrato su di una sua presunta esistenza oggettiva in seno allo sviluppo della matematica, indipendente da fattori sociali, attività umane, processi semiotici e simbolici. Dunque il riferimento alle pratiche del comportamento umano all'interno di una società che esprime necessità e condizionamenti culturali impedisce l'oggettivazione dei progressi del cammino della scienza?

D'Amore: Sono problemi distinti. In ogni caso, qui mi preoccupo di prendere in esame la creazione della matematica intesa come apprendimento che considero come adesione ad una pratica sociale condivisa (D'Amore, 2005a). Il comportamento umano all'interno di una società determina due tipi di attività personali. Attività di adesione alla società secondo le norme pre-stabilite che definiscono gli obiettivi di essa (per esempio, si è in aula, nella società classe, avendo come norma prestabilita per questa società l'apprendimento della matematica); meta-attività di adesione alla società, cercando di ottenere il riconoscimento di funzionamento positivo attraverso il raggiungimento diretto dei fini (proseguendo nell'esempio, se il riconoscimento di funzionamento della società classe è interpretato come il fatto di ricevere una valutazione positiva, evitare di apprendere la matematica ma meta-funzionare in modo da ottenere ugualmente la valutazione positiva) (Bagni, D'Amore, 2005; D'Amore, 2005a). Ritengo sia inutile, forse impossibile, cercare di interpretare l'apprendimento in una società illudendosi che si tratti di fatti individuali isolati. L'apprendimento, e dunque la creazione di competenza matematica, non può essere reso indipendente dai fattori sociali contingenti, dalle attività umane, soprattutto non dai processi semiotici che sono determinanti.

Radford: Io considero le dimensioni sociali e culturali della conoscenza non come cose che ne ostacolano il progresso, bensì, al contrario, come cose che forniscono le condizioni per la sua esistenza e il suo sviluppo. Dato che la conoscenza è il risultato del pensare e il pensare è una prassi sociale cognitiva, il progresso della scienza non può essere descritto in termini generali. Può essere solo descritto prendendosi cura di quelle necessità e di quelle domande che la conoscenza pratica e teorica cerca di risolvere in un certo periodo storico e le cui soluzioni e i metodi restano soggetti alle norme alle quali D'Amore si riferisce. Desidero solo aggiungere che è importante non piangere sul fatto che quelle norme sono impresse in grandi complessi sociali. Tra le altre cose, esse coinvolgono questioni di legittimità e di potere. Le norme che costituiscono e danno forma alle pratiche sociali nelle quali siamo coinvolti (sia nella scuola che fuori di essa), sono davvero altamente politiche. Forse avrò occasione di tornare su questo punto più tardi.

*Bagni: L'*approccio ecologico *(Hardesty, 1977) permette di analizzare gli aspetti culturali e le pratiche condivise (Godino, Batanero, 1994) nel contesto dell'ambiente sociale complessivo nel quale una società è inserita (D'Amore, 1999). La società "classe" vive nell'aula, ma questa non è isolata dal contesto "scuola", risente dei contesti "società" e "famiglia". Le pratiche degli individui appartenenti alla società sono connesse alle aspettative e alle limitazioni poste dall'ambiente in cui vivono ed alle possibilità che esso offre. Dunque, le pratiche non sono* *libere, ma condizionate dall'ambiente, sistemicamente inteso (Bagni, D'Amore, 2005). Da questo punto di vista, le pratiche che si esplicano in aula possono rientrare in un sistema di adattamento degli individui (gli studenti) alla società, sotto la direzione di un altro individuo che l'istituzione sociale ha riconosciuto come suo rappresentante (l'insegnante)?*

D'Amore: Questo punto è già rientrato in quanto detto sopra. Sarebbe illusorio pretendere di interpretare per intero il comportamento dell'individuo I all'interno di una società S in base agli obiettivi, agli scopi che sono determinanti per la identificazione di S. Si sa che esistono metapratiche di adattamento di I ad S, scopi che esulano da quelli condivisi, tentativi di aggirare quegli scopi per giungere a quello che viene identificato come il vero risultato da raggiungere (Bagni, D'Amore, 2005; D'Amore, 2005a). Io credo che il contratto didattico di Brousseau, una delle pietre miliari sulla base delle quali si è fondata la nostra disciplina negli anni '70, si possa spiegare in questi termini. Chi o che cosa condiziona la scelta di I, se aderire ai propositi che determinano S o se mettere in atto delle metapratiche? Senz'altro, come tu dici, delle interpretazioni che di S e dei suoi scopi danno la noosfera e tutte le altre società che contornano I. Lo scopo dell'insegnante, guida, tutor, accompagnatore, organizzatore etc., a seconda delle varie versioni che sono state date in 30 anni alle teorie dell'insegnamento-apprendimento, aderisce in ogni caso al modello che gli è stato assegnato dalla teoria delle situazioni, istituzionalizzatore di conoscenze costruite personalmente in S e poi condivise. Il che determina un ruolo diverso dell'insegnante, riconosciuto da I e fatto proprio da S, non sempre condiviso dalle realtà sociali che circondano S ed influenzano I (D'Amore, 2005a). Le divergenze tra comportamenti di I attesi dall'insegnante o dall'istituzione, sono spesso dovuti a mancanza di competenza (matematica, epistemologica e didattica) di chi deve giudicare il comportamento di I (si veda il mio recente esempio sulla dimostrazione in aula, D'Amore, 2005b). È ovvio che, cambiando i parametri di riferimento, tutto si accomodi ad essi; le scelte epistemologiche di base, o i riferimenti a diverse teorie dell'apprendimento, o entrambi (come spesso capita), determinano vere e proprie rivoluzioni nelle interpretazioni dei fatti che avvengono in aula. Basterebbe pensare a due grandi correnti in alternativa tra loro, ciascuna delle quali multiple: il realismo ed il pragmatismo (D'Amore, 2003b). Ricollegandomi ai giochi linguistici impliciti nella prima domanda, accettando questa idea, resta esclusa ogni interpretazione realista, ma si apre la strada ad interpretazioni alla Chevallard (antropologica), alla Godino (ontosemiotica)… (D'Amore, Godino, 2006). Infine, come non tenere sempre a mente che ogni tentativo dell'individuo di permanere ancorato ad una società, non è che un'adesione al modello implicito negli "altri" che si riconoscono come appartenenti a quella stessa società?

Radford: La mia risposta alla domanda posta è sì: le pratiche d'aula possono essere considerate come sistemi di adattamento degli studenti alla società. Ma come possiamo descrivere questo "adattamento"? E qual è il ruolo giocato in esso dagli insegnanti e dagli studenti? Qui le risposte possono variare, di conseguenza, in particolare, alle premesse epistemologiche. Così il socio-costruttivismo risponde a questa domanda in un modo che, penso, è molto diverso da quello della Teoria delle Situazioni alla quale D'Amore si riferisce nella sua risposta, e dall'approccio storico-culturale del quale ho parlato prima. Dato che il socio-costruttivismo è basato sull'idea che la conoscenza procede attraverso un processo di negoziazione di significati, e in quanto esso concepisce la classe come una specie di spazio commerciale o per gli affari, all'insegnante viene concepito pressoché privo del potere di imprimere una certa direzione alle negoziazioni. Virtualmente, è un negoziatore alla pari di ciascuno dei suoi studenti. Naturalmente tale premessa porta a numerosi interessanti paradossi, ma non è questo di cui ci stiamo occupando. Ciò che vogliamo sottolineare è che l'idea di "adattamento" può assumere diverse forme, secondo la cultura in cui viene considerata, in quanto ogni visione della classe come un sistema di adattamento è già immersa in categorie culturali, alcune delle quali sono parte di quella zona confusa che Castoriadis (1987) chiama "immaginario collettivo". Se pensiamo che lo scopo ultimo dell'educazione è l'autonomia dell'individuo, come suggeriva Kant sintetizzando una delle idee chiave della filosofia europea settecentesca (l'Illuminismo), la negoziazione del significato è una via "naturale" all'adattamento della classe nella società. Il diritto di scegliere il significato dei nostri concetti predomina come parte del nostro cammino verso l'autonomia. L'idea kantiana di adattamento si fonda su di una particolare concezione dell'uomo stesso – sull'idea di sé come di un individuo razionale e autosufficiente. È questo il fondamento del pensiero politico contemporaneo neo-kantiano. Se, per contro, il fine ultimo dell'educazione è considerato il diventare membri di una comunità, dove appartenere significa essere-come-gli-altri, (Radford, in via di pubblicazione 2), allora il termine "adattamento" assume un significato diverso. La classe non è considerata un insieme di individui che si battono per la propria autonomia, ma un gruppo che punta ad un realizzabile modo di vita comunitario.

Bagni: È emblematico che il processo di insegnamento–apprendimento della matematica si giochi all'interno della scuola; tale termine, che in greco antico significa "libero uso delle forze spirituali", oggi significa "istituzione regolata da norme specifiche all'interno di un percorso di istruzione". Nel primo caso, le pratiche prefigurate erano quelle di coltivare il proprio intelletto, verso attività fini a sé stesse; nel secondo la comunità è regolata da norme che sanciscono le attività, i tempi, le modalità, gli scopi, i traguardi. Nel primo caso non ci sono ostacoli; nel secondo, se ne creano anche dove non ce ne sarebbero (Bagni, D'Amore, 2005). Si può collegare questo punto alla tradizionale classificazione degli ostacoli?

D'Amore: Da quando la scuola è quel che noi tutti oggi conosciamo, vige la seconda delle interpretazioni che tu fornisci; la storia non ci dice molto sulla prima e comunque ci sfugge. Certo, la classificazione degli ostacoli è stata fatta per comodità concettuale e per orientare gli studi. Ne ho discusso parecchio personalmente con Brousseau e in un mio lavoro (D'Amore, 2003b) presento una "spiegazione" della terna (ostacoli ontogenetici, didattici, epistemologici) fondata sul triangolo della didattica (nell'ordine: allievo, insegnante, Sapere). In questa spiegazione, da un lato funzionale e dall'altra concettualmente organizzativa, secondo Brousseau resta nascosta la funzione, così importante nella teoria delle situazioni, del suo *milieu*. Purtroppo non ho nulla di scritto, trattandosi solo di conversazioni. Tuttavia, il nostro comune amico, cui tutti riconosciamo un'importanza storica determinante per la disciplina, ha accettato di scrivere una bella prefazione a quell'opera, convinto di poter aderire dunque a questa visione che cerca di accomodare due punti di vista. Io credo che, al di là di questa modellizzazione di comodo, non si possa pensare che la tradizionale classificazione degli ostacoli sia ad intersezione vuota, come ho cercato di far vedere in diversi lavori, miei o di miei allievi (che non cito, per brevità); in questi, si parte spesso da ostacoli epistemologici per mostrare che la vera causa evidente delle situazioni di mancata costruzione di conoscenza risiede in ostacoli didattici. Per farla breve, la classificazione "storica" degli ostacoli fornisce solo un modello. So già che Radford troverà molto da ridire su questa questione, e potrei già anticipare le sue obiezioni. Mi dirà che la classificazione degli ostacoli e la natura teoria di essi dipende dalle scelte che noi opereremo sulla cultura e sulla conoscenza. Come non condividere questo modo di pensare? Ma esso è a monte, mentre la domanda è, per così dire, a valle. Se vogliamo ribaltare tutto, allora accettiamo che l'ostacolo non sempre è un ostacolo, ma è un… compagno di viaggio con il quale dobbiamo fare i conti, che a volte è estremamente difficile distinguere un ostacolo ontogenetico da uno didattico, che ho esempi di ostacoli tratti dalla vita reale di classe che sono tutti e tre gli ostacoli messi insieme. Che cosa vuol dire *davvero* costruire conoscenza? Che cosa è *davvero* conoscenza? Le risposte a queste domande determinano la natura stessa delle scelte sulle quali si basano definizioni e connotazioni. Ci sono troppe variabili in gioco per sparare sentenze univoche.

Radford: Il modo in cui la questione è posta potrebbe suggerire che tutti gli sforzi miranti al "libero uso delle forze spirituali" non troveranno ostacoli, mentre nel secondo caso gli ostacoli diventeranno inevitabili. Non sono sicuro di essere d'accordo. Forse il punto sul quale incontro qualche problema è il significato del termine *ostacolo*. Se con il termine ostacolo epistemologico ci riferiamo ad una sorta di conoscenza parziale collocata da qualche parte nel percorso dello sviluppo concettuale, una conoscenza che serve per risolvere certi problemi ma che inizia ad essere causa di errori non appena essa viene applicata al di fuori di essi, la questione fondamentale per me riguarda la spiegazione della *natura* del cammino che si suppone essere percorso da tutti noi durante lo sviluppo concettuale, a prescindere dalla nostra collocazione temporale e culturale. Proprio in quanto la sua natura viene ritenuta essere al di là della cultura e del tempo, tale percorso sembra essere un percorso *universale* di sviluppo concettuale. Ora, dato che per me la cultura e la conoscenza hanno la stessa sostanza, considero la precedente concezione di ostacolo troppo ambiziosa. Ma, per amor di chiarezza, continuiamo a rispondere alla domanda. Si può pensare che gli ostacoli appariranno quando le pratiche socioculturali saranno poste in essere. Questo modo di intendere la questione degli ostacoli nell'apprendimento è assai diffuso. Piuttosto che una sorta di potenziamento, la cultura viene vista come un intralcio. Credo tuttavia che questa sia una concezione molto restrittiva della cultura. Non ho qui lo spazio per entrare nei dettagli (mi sono occupato di questo problema in: Radford, via di pubblicazione 2), ma vorrei ricordare brevemente il caso di un "wild child", di un bambino cresciuto senza alcun contatto con la cultura (Newton, 2002). Uno di questi "wild children" è stato trovato a Rhodez, una città tra Montpellier e Toulouse, nel 1800. Il bambino, approssimativamente dodicenne, era più un animale che un uomo. Pierre-Joseph Bonnaterre – un insegnante di storia naturale – studiò tale bambino e cercò di insegnargli alcune cose, ma il bambino non imparò a parlare e non comprendeva molti fatti socio-culturali essenziali. Trascorse la propria vita senza un linguaggio, coinvolgendosi soltanto in pratiche sociali estremamente semplici. Era già troppo tardi, per lui, per tentare un ingresso nel linguaggio e nella società. Non aveva potuto trarre benefici dall'intelligenza storica depositata nel linguaggio e nelle pratiche sociali e, a quanto possiamo dire, ebbe una vita molto semplice, principalmente regolata in base all'istinto. Consentire a questo bambino un "libero uso delle forze spirituali" lo ha mantenuto lontano dalla cultura, portandolo ad essere un proto-essere umano che trascorre il tempo salendo sugli alberi e correndo dietro alle farfalle. Questo esempio mostra, ritengo, la dimensione di potenziamento della cultura. Naturalmente c'è un altro aspetto riguardante la cultura e le sue pratiche. Ci sono buoni modi di insegnare e cattivi modi di insegnare. Ma, come suggerisce la mia precedente osservazione, la distinzione buono/cattivo dipende dalla concezione culturale della conoscenza e dal ruolo con il quale insegnanti e studenti sono coinvolti nei processi di insegnamento-apprendimento. Questo è il motivo per il quale un insegnante può essere buono in un certo paese e cattivo in un altro.

Non intendo passare alla prossima domanda senza occuparmi direttamente del punto centrale della domanda attualmente in discussione – il problema della classificazione degli ostacoli. C'è un punto di vista secondo il quale, indipendentemente dalla cultura e dalla fase della crescita concettuale del bambino, la traiettoria da A a B (per proseguire a considerare la metaforica traiettoria spaziale) è tormentata da ostacoli intrinseci che sono sotto la sola giurisdizione del sapere. Chiunque cammini sulla strada da A a B li incontrerà. D'Amore dice, rispondendo alla presente domanda, che la nota classificazione di ostacoli (ontogenetici, didattici ed epistemologici) potrebbe essere considerata una "comodità concettuale." Secondo me, il problema è che una tale distinzione è molto più di una "comodità concettuale." Le nostre scelte epistemologiche non sono innocenti. Sono concessioni a particolari concezioni della conoscenza e del conoscere, e la risposta alla domanda se gli ostacoli possano essere classificati in un modo oppure in un altro dipende da queste scelte.

D'Amore: Facendo riferimento all'idea di "comodità concettuale" non si esclude affatto una non neutralità delle scelte epistemologiche; posso anzi essere più drastico di te, senza alcuna paura di incoerenza, anzi!, affermando che ogni scelta epistemologica è non neutra, "non innocente", come dici tu; addirittura lo sono, a mio avviso, le scelte epistemologiche implicite, quelle non dette e talvolta neppure riconosciute da chi le compie.

Bagni: Uno dei membri della microsocietà classe ha l'autorità (socialmente riconosciuta dalla noosfera e dagli altri membri) per stabilire se una pratica singola sia o no deviante o collimi con le attese; tale membro è l'insegnante. Possiamo supporre che la devianza dalla pratica attesa testimoni che esiste un ostacolo che si è andato a frapporre tra l'invito alla condivisione di una pratica sociale, fatto dall'insegnante, e la pratica privata messa in campo da uno studente, membro della microsocietà? L'indagine sociologica sarebbe allora lo strumento per riconoscere l'esistenza di un ostacolo che impedisce l'attuazione di pratiche, in una microsocietà che condivide problemi, usi e, appunto, pratiche.

D'Amore: Sì, è così, a mio avviso. Il compito personale dello studente I all'interno della società S è quello di aderire alle pratiche linguistiche di condizione concettuale degli oggetti O stabiliti come competenze da raggiungere (D'Amore, 2003e, 2005). L'imitazione (di pratica soprattutto linguistica, più in generale semiotica) è, da questo punto di vista, la forma più diffusa di questa adesione che è quella che l'insegnante deve valutare come condivisione raggiunta di pratiche (Sierpinska, Lerman, 1996). Da questo punto di vista, l'insegnante ha un ruolo determinante, decisivo, da un punto di vista sociologico, riconosciutogli per status. La devianza di uno studente I dalla pratica attesa come condivisa è, in realtà, un mancato riconoscimento di pratica: l'insegnante non riconosce nell'attività di I quella propria, presa a modello o proposta come tale, da imitare (D'Amore, 2005b: ma è solo un esempio). Dunque, tutto si riduce ad un confronto tra pratiche di esseri umani all'interno della società S, solo che uno di essi ha un ruolo specifico, riconosciuto, unico. Credo che l'indagine sociologica sia lo strumento per indagare attese, adesioni, fughe, devianze. Molti studi, non solo miei, tentano di mostrare come anche la teoria delle situazioni didattiche si possa interpretare in questo senso (Godino, Llinares, 2000). Tuttavia, implicita nella tua domanda ci sono questioni enormi, affrontare le quali mi angoscia. In alcuni miei lavori di etnomatematica (D'Amore, 2003a; D'Amore, Fandiño Pinilla, 2001, 2005; ma anche D'Amore, 2005b) ho mostrato come l'ipotesi della costruzione di *diverse* culture paritetiche sia reale, in luoghi lontani da noi o nelle nostre stesse aule. In particolare, attraverso 2005b ho mostrato come l'idea stessa di dimostrazione in chiave euclidea (aristotelica) da molti realisti considerata fondamentale per *la* cultura matematica universale, sia interpretata nella realtà scolastica da giovani studenti in una chiave del tutto diversa (in termini nyaya); ne nasce un qualcosa che amo chiamare *relatività della cultura* anche matematica. Questa diversità di culture, di interpretazioni, di suggestioni è una profonda ricchezza che troppo spesso viene affossata in nome di una universalità che, semplicemente, non esiste come fatto culturale, è riduttiva, è falsa. Per tre anni ho avuto occasione di fare viaggi frequenti in Lussemburgo e, di fronte alle mie proposte di interpretazione della didattica, gli insegnanti mi dicevano: Ma il nostro problema non è la didattica, il nostro problema è la varietà di lingue messa in campo dagli studenti; non sappiamo più in che lingua rivolgerci loro. Questo era un modo perfetto per osservare meglio, su una base concreta per quanto parziale, la *babele semiotica* di ogni classe, considerando contributo ogni personale stimolo. Ho molto apprezzato il lavoro di Radford (2004b) ed ho seguito parola per parola quel che in esso osservava e suggeriva. Credo che questo suo lavoro ed il mio (2005b) siano da questo punto di vista un po' devianti rispetto alla maggior parte dei benpensanti (non è un caso che, prima di pubblicare il mio, ho sottoposto proprio a lui tutta la riflessione). Per finire, credo che permettere una libertà espressiva anche in matematica sia un bene prezioso per l'apprendimento della matematica, anche se richiede insegnanti attrezzati e colti.

Radford: La questione dei problemi riguardanti *la devianza* rispetto ad una certa ben stabilita pratica è un problema delicato nell'educazione soprattutto oggi, in quanto le nostre classi stanno diventando sempre più multiculturali. Ho sempre sostenuto che è un errore concepire la cultura come una camicia di forza. Ho sostenuto prima che le culture hanno una dimensione di potenziamento. Ma le culture sono diverse. Esse trasmettono valori e attitudini diverse (ad esempio, le attitudini all'apprendimento e alla matematica), etc. Questo è stato un bel risultato proposto da Anna Sfard nella sua recente relazione plenaria alla 2005 PME Conference in Australia (Sfard, Prusak, 2005). Dunque come ci occuperemo della questione della differenza? Vorrei qui fare riferimento al lavoro di Judith Bernhard (1995). Nel suo articolo, Bernhard distingue quattro momenti nei quali la differenza è stata considerata nel passato: (1) differenza come deficit; (2) differenza come svantaggio/privazione; (3) differenza come differenza non sostanziale; e (4) differenza come fondamentale eterogeneità. Le prime tre, sostiene, corrispondono approssimativamente alle prospettive dominanti, nei successivi periodi storici, della corrente principale del pensiero psicologico. Nella prima, in particolare, c'è la fede nell'"universalità delle norme occidentali e nel fatto che le pratiche delle altre culture rappresentino una devianza ovvero una forma meno sviluppata rispetto all'ideale. Le differenze sono state spesso viste come segni di capacità innate". Sembra che le cose siano un po' cambiate e che oggi ci sia la disponibilità ad intendere la diversità come fondamentale eterogeneità. La storia della matematica e dell'etnomatematica può essere qui di grande utilità. Può fornire importanti suggerimenti su come comprendere la diversità. Dobbiamo capire che apparteniamo ad una tradizione intellettuale centrata in testi – apparteniamo infatti ad una forte "tradizione scritta", per usare i termini di Jack Goody. I testi matematici, pensiamo, devono essere espressi attraverso segni scritti. Bene, ma ci sono altri tipi di espressione, come mostra la tradizione orale. Ci sono altri modi di riflettere sul mondo che possono essere chiamati "matematici". In (Radford, 2004b) ho suggerito la necessità di ripensare il nostro concetto di "testo matematico", e di allargarla in modo da includere altri segni, come parole pronunciate, gesti, azioni e via di seguito. Nelle mie ricerche in classe ho spesso trovato studenti (non necessariamente provenienti da altre culture) desideranti – e anche felici – di fare matematica avendo la possibilità di esprimersi in mezzi diversi dalla scrittura. La domanda è: ma sarebbe ancora la "nostra" matematica? Penso che la risposta sia no. Il punto centrale, però, è che io non ritengo che ciò costituirebbe una perdita. Anzi, penso che sarebbe un guadagno. Naturalmente devo ancora convincere di questo un esercito di colleghi e immagino che ciò non sarà facile, specialmente quando tenterò di convincere quelli provenienti dallo schieramento dei razionalisti.

Riferimenti bibliografici

Bachelard G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*, VRIN, Paris.

Bagni G.T. (2005). The historical roots of the limit notion. Cognitive development and development of representation registers, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education* 5:4, 453-468.

Bagni G.T. (in via di pubblicazione). Some cognitive difficulties related to the representations of two major concepts of Set Theory. *Educational Studies in Mathematics.*

Bagni G.T., D'Amore B. (2005). Epistemologia, sociologia, semiotica: la prospettiva socio-culturale, *La matematica e la sua didattica*. 1, 73-89.

Balacheff N. (1988). Le contrat et la coutume: deux registres des interactions didactiques. Laborde C. (Ed.). *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique*. Grenoble: La Pensée Sauvage. 15-26.

Barbin E. (1994). Sur la conception des savoirs géométriques dans les Éléments de Géométrie. Gagatsis A. (Ed.). Histoire et enseignement des Mathématiques. *Cahiers de didactique des Mathématiques*. 14-15, 135-158.

Bauersfeld H. (1995). "Language game" in the mathematics classroom: their function and their effects. In: Cobb P., Bauersfeld H. (eds.) (1995). *The emergence of meaning: interaction in class-room cultures*. Hillsdale NJ: Lawrence Erlbaum Ass.

Bernhard J. (1995). Child development, cultural diversity, and the professional training of early childhood educators. *Canadian Journal of Education*. **20**(4), 415-436.

Brickhouse N. (1990). Teachers' beliefs about the nature of science and their relationship to classroom practice. *Journal of teacher education*. 41 (3), 53-62.

Brousseau G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes in mathématiques. Wanhamme W., Wanhamme J. (Eds.). *La problématique et l'enseignement des mathématiques*, Actes de la XXVIIIème rencontre CIEAEM, Louvain la Neuve, 5-12 août 1976.

Brousseau G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes in mathématiques. *Reserches en Didactique des Mathématiques*. 4, 2, 165-198.

Brousseau G. (1989). Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. Bednarz N., Garnier C. (Eds.). *Constructions des savoirs, obstacles et conflits*. 41-64. Montreal: Agence d'Arc.

Castoriadis C. (1987). *The imaginary institution of society*. Massachusetts, M.I.T. Press.

D'Amore B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

D'Amore B. (2001a). Une contribution au débat sur les concepts et les objets mathématiques. *Scientia Paedagogica Experimentalis*. XXXVIII, 1, 17-46.

B. D'Amore (2001b). Conceptualisation, registres de représentations sémiotiques et noétique: interactions constructivistes dans l'apprentissage des concepts mathématiques et hypothèse sur quelques facteurs inhibant la dévolution. *Scientia Paedagogica Experimentalis*. Gent, Belgio. XXXVIII, 2, 143-168.

D'Amore B. (2003a). Matemática em algumas culturas da America do Sul: Uma contribuição à Etnomatemática. *Bolema. Boletim de Educação Matemática*. Rio Claro, SP, Brasile. 19, 73-89.

D'Amore B. (2003b). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica*. Bologna: Pitagora.

D'Amore B. (2003c). The noetic in mathematics. *Scientia Pedagogica Experimentalis*. (Gent, Belgio). XXXIX, 1, 75-82.

D'Amore B. (2003d). La complexité de la noétique en mathématiques ou les raisons de la dévolution manquée. *For the learning of mathematics*. 23, 1, 47-51.

D'Amore B. (2003e). La complejidad de la educación y de la construcción del saber. *Suma* (Zaragoza, Spagna). 43, 23-30.

D'Amore B. (2004). Il ruolo dell'Epistemologia nella formazione degli insegnanti di Matematica nella scuola secondaria. *La matematica e la sua didattica*. 4, 4-30.

D'Amore B. (2005a). Pratiche e metapratiche nell'attività matematica della classe intesa come società. Alcuni elementi rilevanti della didattica della matematica interpretati in chiave sociologica. *La matematica e la sua didattica.* 3, 325-336.

D'Amore B. (2005b). Secondary school students' mathematical argumentation and Indian logic (nyaya). *For the learning of mathematics*. 25, 2, 26-32.

D'Amore B., Fandiño Pinilla MI. (2001). Matemática de la cotidianidad. *Paradigma*. (Maracay, Venezuela). XXII, 1, 59-72.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2004). Cambi di convinzione in insegnanti di matematica di scuola secondaria superiore in formazione iniziale. *La matematica e la sua didattica*. 3, 27-50.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2005). Storia ed epistemologia della matematica basi etiche. *La matematica e la sua didattica*. 4, 503-515.
D'Amore B., Godino J.D. (2006). Punti di vista antropologico ed ontosemiotico in Didattica della Matematica. *La matematica e la sua didattica*. 1, 9-38.
D'Amore B., Sbaragli S. (2005). Analisi semantica e didattica dell'idea di "misconcezione". *La matematica e la sua didattica*. 2, 139-163.
D'Amore B., Speranza F. (eds) (1989). *Lo sviluppo storico della matematica - Spunti didattici*. Vol. primo. Roma: Armando.
D'Amore B., Speranza F. (eds) (1992). *Lo sviluppo storico della matematica - Spunti didattici*. Vol. secondo. Roma: Armando.
D'Amore B., Speranza F. (eds) (1995). *La matematica e la sua storia. Alcuni esempi per spunti didattici*. Milano: Angeli.
de Haan M. (1999). *Learning as a cultural practice*. Amsterdam: Thela Thelis.
Eco U. (1975). *Trattato di semiotica generale*. Milano: Bompiani.
Enriques F. (1942). L'errore nelle matematiche. *Periodico di matematiche*. IV, XXII. [Sotto lo pseudonimo A. Giovannini].
Fauvel J. and Maanen, J. (2000). *History in Mathematics Education. The ICMI Study.* Dordrecht
Boston, London: Kluwer**.**
Feyerabend P.K. (2003). *Contro il metodo*. Milano: Feltrinelli. (I ed. originale inglese: London, 1975).
Furinghetti F., Radford L. (2002). Historical conceptual developments and the teaching of mathematics: from philogenesis and ontogenesis theory to classroom practice. English L. (Ed.). *Handbook of International Research in Mathematics Education*. 631-654. Hillsdale: Erlbaum.
Gadamer H.-G. (1975). *Truth and Method*. New York: Crossroad. (2nd ed.: 1989).
Godino J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 22, 2/3, 237-284.
Godino J.D., Batanero C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en didactiques des mathématiques*. 14, 3, 325-355.
Godino J. D., Llinares S. (2000). El interaccionismo simbólico *en* educación matemática. *Educación Matemática*. 12, 1, 70-92.
Grugnetti L., Rogers L. (2000). Philosophical, multicultural and interdisciplinary issues. Fauvel J., van Maanen J. (Eds.). *History in Mathematics Education*. 39-62. Dodrecht: Kluwer.
Habermas J. (1999), *Wahrheit und Rechtfertigung. Philosophische Aufsätze*. Frankfurt a.M.: Suhrkamp (*Truth and Justification*, MIT Pr., Cambridge 2003).

Hardesty D. (1977). *Ecological Anthropology*. New York: Wiley.
Hashweb M.Z. (1996). Effects of science teachers' epistemological beliefs in teaching. *Journal of Research in Science Teaching*. 33 (1), 47-63.
Ilyenkov E. (1977). The concept of the ideal. *Philosophy in the USSR. Problems of Dialectical Materialism*. Moscow: Progress Publishers.
Leontiev A.A. (1981a). Sign and Activity. Wertsch J.V. (Ed.) (1981). *The Concept of Activity in Soviet Psychology*. New York: Sharpe. 241-255.
Leontiev A.A. (1981b). The problem of Activity in Psychology. Wertsch, J.V. (Ed.) (1981). *The Concept of Activity in Soviet Psychology*. New York: Sharpe. 37-71.
McClain K., Cobb P. (1997). *An analysis of the teacher's role in guiding the evolution of sociomathematical norms*. Vanderbilt University.
Newton, M. (2002). *Savage Girls and Wild Boys. A History of Feral Children*. London, Faber and Faber.
Piaget J., Garcia R. (1983). *Psychogenèse et histoire des sciences*. Paris: Flammarion.
Perrin-Glorian, M.-J. (1993). Théorie des situations didactiques: naissance, développement et perspectives. *Vingt ans de didactique des mathématiques en France.* Grenoble : La pensée sauvage**:** 97-147.
Radford L. (1997). On Psychology, Historical Epistemology and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics. *For the Learning of Mathematics*. 17(1), 26-33.
Radford L. (2003a). On the epistemological limits of language. Mathematical knowledge and social practice in the Renaissance. *Educational Studies in Mathematics*. 52(2), 123-150
Radford L. (2003b). On Culture and Mind. A post-Vygotskian Semiotic Perspective, with an Example from Greek Mathematical Thought. Anderson M. et Al. (Eds.). *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing*. 49-79, Legas, Ottawa.
Radford L. (2004a). *The Cultural-Epistomological Conditions of the Emergence of Algebraic Symbolism.* Plenary Lecture presented at the 2004 History and Pedagogy of Mathematics Conference, Uppsala, Sweden. (text available at: http://laurentian.ca/educ/lradford/PUBLIC.HTML).
Radford L. (2004b). Syntax and Meaning. In M. J. Høines and A. B. Fuglestad (eds.), *Proceedings of the 28 Conference of the international group for the psychology of mathematics education* (PME 28), Vol. 1, pp. 161-166. Norway: Bergen University College.
Radford L. (in via di pubblicazione 1). The Anthropology of meaning. *Educational Studies in Mathematics*.

Radford L. (in via di pubblicazione 2). Semiótica cultural y cognición. In: R. Cantoral y O. Covián (eds.), *Investigación en Matemática Educativa en Latinoamérica*. México.

Radford L., Boero P., Vasco C. (2000). Epistemological assumptions framing interpretations of students understanding of mathematics Fauvel J., van Maanen J. (Eds.). *History in Mathematics Education*. 162-167. Dordrecht: Kluwer.

Robertson I. (1977). *Sociobiology*. New York: Worth Publishers Inc.

Romberg T. (1988). Necessary ingredients for a theory of mathematics education. In: Steiner HG., Vermandel A. (eds) (1988). *Foundations and methodology of the discipline Mathematics Education*. Proceedings of the 2nd TME. Bielefeld.

Sfard A., Prusak, A. (2005). Telling identities: The missing link between culture and learning mathematics. *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. H. L. Chick and J. L. Vincent. Melbourne. **1:** 37-52.

Sierpinska A., Lerman S. (1996). Epistemology of mathematics and of mathematics education. In: Bishop AJ. et al. (eds.) (1996). *International handbook of mathematics education*. 827-876. Dordrecht NL: Kluwer Academic Publ.

Wartofsky M. (1979). *Models, Representation and the Scientific Understanding*. Dordrecht: Reidel.

Werner H. (1948). *Comparative Psychology of Mental Development*. New York: International University Press. 2nd edition: 1957.

Wittgenstein L. (1956), *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*. Oxford: Blackwell.

Luis Radford è professore alla Laurentian University, Ontario, Canada. Insegna presso la École des sciences de l'éducation nel programma di formazione degli insegnanti e dirige la ricerca nel proprio Laboratory of Cultural Semiotics and Mathematical Thinking. È autore (con Serge Demers) del libro *Communication et apprentissage*, pubblicato nel 2004 con il patrocinio dell'Ontario Ministry of Education. È attualmente associate editor del periodico *For the Learning of Mathematics* e membro dell'editorial board di numerose riviste, tra le quali *Educational Studies in Mathematics*, *Mathematical Thinking and Learning*, *Revue des sciences de l'éducation*, *Educación Matemática*, *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education.* Ha ricevuto nel 2004-05 il Laurentian University Research Excellence Award.

Bruno D'Amore è professore alle Università di Bologna e di Bolzano, presso l'Alta Scuola Pedagogica di Locarno e tiene annualmente corsi post laurea presso l'Università Distrital di Bogotà. È il responsabile scientifico del Nucleo di Ricerca di Bologna; ha fondato e dirige la rivista *La matematica e la sua didattica* ed il Convegno Nazionale *Incontri con la Matematica* di Castel San Pietro Terme. È membro del Comitato Scientifico di varie riviste italiane e delle seguenti internazionali: *Cahiers de Didactique des Mathématiques* (Grecia), *Bollettino degli insegnanti di Matematica* (Svizzera), *Revista Latinoamericana de Investigacción en Matemática Educativa* (Messico), *TEA* (Colombia), *Mediterranean journal for research in mathematics education* (Cipro). È autore, tra gli altri, dei seguenti libri: *Problemi* (prefazione di Gérard Vergnaud, Milano: Angeli, 1993; ed. in lingua spagnola, Madrid: Sintesis, 1997); *Le basi filosofiche, epistemologiche, pedagogiche e concettuali della didattica della matematica* (prefazione di Guy Brousseau, Bologna: Pitagora, 2003; ed. in lingua spagnola, Barcelona-México: Reverté, 2005; ed. in lingua portoghese, Sao Paolo: Escritura, 2005); *Elementi di didattica della matematica* (prefazione di Colette Laborde, Bologna: Pitagora, 1999; ed in lingua spagnola, Bogotà: Magisterio, 2006; in corso di traduzione in lingua portoghese). Questo ultimo libro ha vinto il I premio assoluto *Lo stilo d'oro* nel 2000.

Giorgio T. Bagni è ricercatore confermato di matematiche complementari presso il Dipartimento di Matematica e Informatica, insegna presso la Facoltà di Scienze della Formazione ed è membro della Commissione per il Corso Interfacoltà di Filosofia della Forma dell'Università di Udine. È socio onorario dell'Ateneo di Treviso.